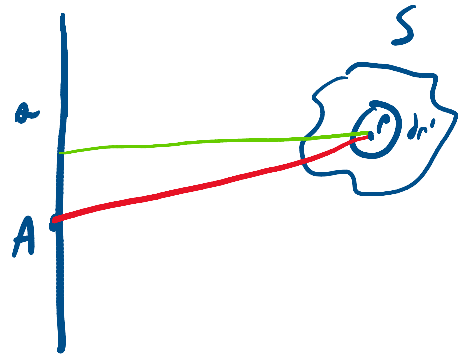


Momento d'Inerzia rispetto ad un asse a :

$$I_a = \int_{C'} \rho(r') \delta^2(r') dr'$$

dove δ è la distanza di P dall'asse

$$\delta(r') = |(P-A) \wedge a|$$



$$a \cdot I_A(a) = \int_{C'} \rho(r') |(P-A) \wedge a|^2 dr' = \int_{C'} \rho(r') \delta^2(r') dr' = I_a$$

Se si scelgono come vettori quelli di una terna ortonormale (e_i) ed \tilde{O} è un qualsiasi punto, si ha:

$$\begin{aligned} e_i \cdot I_{\tilde{O}}(e_i) &= (e_i)_k I_{\tilde{O}_{km}} (e_i)_m = \delta_{ik} I_{\tilde{O}_{km}} \delta_{im} = \\ &= I_{\tilde{O}_{ii}} \end{aligned}$$

$I_{\tilde{O}_{ii}}$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per \tilde{O} e parallelo a e_i

$$I_{\tilde{O}_{ij}} = - \int_{C'} \rho(r') (x_i - x_{\tilde{O}_i})(x_j - x_{\tilde{O}_j}) dr'$$



Teorema di Huggens

mercoledì 14 febbraio 2024 15:50

Sia I_G il tensore di inerzia rispetto al baricentro, quello rispetto ad un altro punto \tilde{O} è dato da

$$I_{\tilde{O}} = I_G + I_{\tilde{O}}^G$$

dove $I_{\tilde{O}}^G$ è il tensore d'inerzia rispetto a \tilde{O} che avrebbe G se in esso fosse concentrata tutta la massa di S



Forze Attive $\left\{ \begin{array}{l} \text{Forze Concentrate} \\ \text{Forze di Volume} \end{array} \right.$

$R = \sum_{A=1}^{K_1} \bar{F}_A$, $M_{\tilde{O}} = \sum_{A=1}^{K_1} (P_A - \tilde{O}) \wedge \bar{F}_A$

$R^{(v)} = \int_{C'} \rho f(P, v, t) d^3r'$, $M_{\tilde{O}}^{(v)} = \int_{C'} (P - \tilde{O}) \wedge \rho f d^3r'$

$$R^{(v)} = \sum_{A=1}^{K_1} \bar{F}_A + \int_{C'} \rho f(r', v(r'), t) d^3r'$$

$$M_{\tilde{O}}^{(v)} = \sum_{A=1}^{K_1} (P_A - \tilde{O}) \wedge \bar{F}_A + \int_{C'} (P - \tilde{O}) \wedge \rho f d^3r'$$

Reazioni vincolari: quando il contatto è puntiforme le reazioni vincolari sono mediante un vettore ϕ applicato nel punto di contatto (= risultante delle forze vincolari) ed una coppia orente momento Γ (attrito volvente) uguale al momento risultante delle reazioni vincolari rispetto al punto di contatto.

Risultante Forze di superficie nel punto di contatto

Forza per unità di superficie

$$R^{(v)} = \sum_{A=1}^{K_2} \phi_A + \int_{\partial C'} t(P, v, t) d\sigma'$$

$$M_{\tilde{O}}^{(v)} = \sum_{A=1}^{K_2} (P_A - \tilde{O}) \wedge \phi_A + \sum_{A=1}^{K_2} \Gamma_A + \int_{\partial C'} (P - \tilde{O}) \wedge t d\sigma'$$

Momento rispetto a \tilde{O} dei risultanti

momento delle coppie

• I vincoli si dicono lisci o privi di attrito se l'attrito volvente è nullo in ogni punto di contatto e le reazioni

solvente è nullo in ogni punto di contatto e le reazioni sono normali alla superficie di S in ogni punto di contatto

• Quando il contatto è puntiforme:

$$\phi = R^{(v)} = \overset{\text{m}}{\hat{N}} + \overset{\text{II}}{\hat{\pi}} A \quad (A \text{ attrito radente})$$

$$\Gamma = \overset{\text{m}}{\hat{\Gamma}} + \overset{\text{II}}{\hat{\Gamma}} \quad (\text{Attrito di giro} + \text{Attrito di Rotolamento})$$

• I vincoli agenti su S si dicono scalari se:

1) S è in quiete rispetto a Σ , si ha:

$$|A| \leq \overset{(s)}{f} |N| \quad \leftarrow \text{Coefficiente attrito statico}$$

$$|\Gamma_g| \leq \overset{(s)}{h_g} |N| \quad \leftarrow \text{Parametro di attrito statico di giro}$$

$$|\Gamma_r| \leq \overset{(s)}{h_r} |N| \quad \leftarrow \text{Parametro di attrito statico di rotolamento}$$

2) S è in moto rispetto a Σ , si ha:

$$|A| = \overset{(d)}{f} |N|$$

$$\frac{A}{|A|} = - \frac{V_{\pi}}{|V_{\pi}|} \quad (\text{Componente su } \Pi \text{ di } V_p)$$

$$|\Gamma_g| = \overset{(d)}{h_g} |N|$$

$$\frac{\Gamma_g}{|\Gamma_g|} = - \frac{\omega_g}{|\omega_g|} \quad (\text{Componente lungo } m \text{ di } \omega)$$

$$|\Gamma_r| = \overset{(d)}{h_r} |N|$$

$$\frac{\Gamma_r}{|\Gamma_r|} = - \frac{\omega_r}{|\omega_r|} \quad (\text{Componente su } \Pi \text{ di } \omega)$$

$$f^{(d)} < f^{(s)}, \quad h_g^{(d)} < h_g^{(s)}, \quad h_p^{(d)} < h_p^{(s)}$$

• Equazioni cardinali per un corpo rigido

$$\dot{Q} = R^{(x)} = R^{(\sigma)} + R^{(v)}$$

$$\frac{d}{dt} L_{\tilde{0}} + V_{\tilde{0}} \wedge m V_{\tilde{0}} = M_{\tilde{0}}^{(x)} = M_{\tilde{0}}^{(\sigma)} + M_{\tilde{0}}^{(v)}$$

• Potenza delle forze applicate di un corpo rigido

$$P = \sum_{A=1}^{k_1} F_A \cdot V_A = \sum_{A=1}^{k_1} F_A (V_{\tilde{0}} + \omega \wedge (P_A - \tilde{0})) = R \cdot V_{\tilde{0}} + \omega M_{\tilde{0}}$$

• Teorema dell'energia cinetica

$$\dot{K} = P^{(\sigma)} + P^{(x)}$$

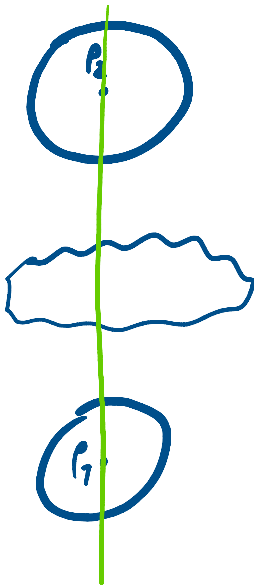


Un asse fisso può realizzarsi in diversi modi:

- con due cerniere sferiche
- con una cerniera cilindrica con risalti che impediscono lo scorrimento
- con una cerniera sferica ed una cilindrica

Se i vincoli sono lisci, le reazioni vincolari agenti sul solido devono essere ortogonali alle superfici di contatto.

Esempio (Due cerniere Sferiche)



Il corpo viene fissato ai gusci interni.

L'asse che passa da P_1 e P_2 è fisso.

P_1 e P_2 sono fissi.

Il guscio esterno viene fissato al riferimento R

Sia S_1 il guscio sferico esterno, incompleto che si estende ad un'area di una semisfera.

per più di una semisfera.

Sia S_2 il guscio interno completo.

S_1 ed S_2 hanno lo stesso raggio, perché S_2 rispetto ad S_1 deve solamente ruotare, non ci deve essere spostamento traslatorio di S_2 rispetto S_1 ; per questo S_1 si estende per più di una semicirconferenza, almeno S_2 non rimane incastrato.

Se P è un punto qualsiasi di contatto tra le sfere della cerniera, la forza T esercitata dal rimbolo per unità di superficie ha retta d'azione che interseca l'asse fisso. Essendo il rimbolo liscio, T è diretto verso il centro della cerniera, perciò $T \parallel (P - C_1)$

Consideriamo un elementino $d\sigma'$ centrato in P , dunque

$T \wedge (P - O) d\sigma'$ è ortogonale al piano individuato dai

tre vettori $\begin{cases} (P - O) \\ (P, T) \\ \sigma = X_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow e_3 \cdot ((P - O) \wedge T) d\sigma' = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\sigma'} (P-O) \wedge T \, d\sigma' = 0$$

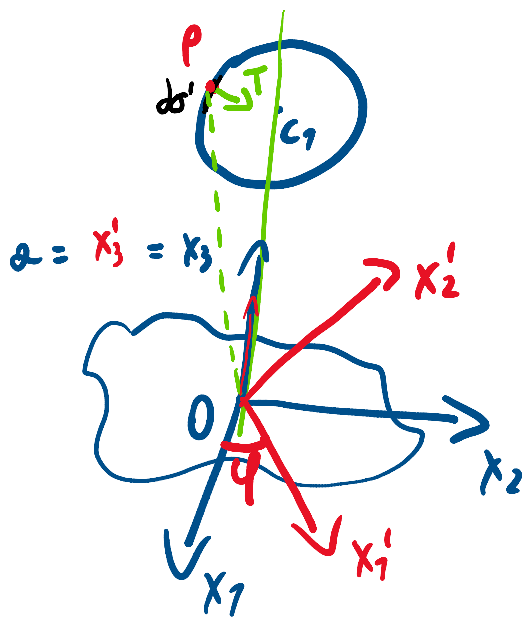
σ' è la superficie occupata dal guscio della sfera interna nello spazio solidale

$$\Rightarrow M_0^{(v)} \ell_3 = 0$$

Per un corpo con un asse fisso liscio si ha

$$M_0^{(v)} \ell_3 = 0$$

indipendentemente da come si realizza l'asse.



Un solido con un asse fisso ha solo un grado di libertà, ad esempio come parametro per trovare la configurazione si può usare l'angolo φ di Ox_1' rispetto Ox_1 .

Si può usare il vettore \mathbf{l} e \mathbf{M} / \mathbf{L}

Dobbiamo cercare di estrarre dalle equazioni cardinali
una equazione scalare pura (in cui non compaiono
relazioni vettoriali)

Consideriamo la seconda equazione cardinale rispetto al
polo O e proiettiamola sull'asse x_3

$$\dot{L}_0 \cdot l_3 = \left[M_0^{(a)} + M_0^{(v)} \right] l_3 = M_0^{(a)} \cdot l_3$$

\uparrow
 $M_0^{(v)} \cdot l_3 = 0$

Stiamo assumendo che delle forze attive conosciamo le
leggi di forza, questo significa che conosciamo la
dipendenza del momento delle forze attive dalla
configurazione del corpo

$$\dot{L}_{0,3} = M_{0,3}^{(a)}(q, \dot{q}, t)$$

dove

q determina la configurazione

\dot{q} determina l'atto di moto

■

Calcoliamo il momento angolare per un moto con un

Calcoliamo il momento angolare per un moto con un
asse fisso.

$$L_0 = I_0(\omega)$$

(Matrice del
tensore d'Inerzia
rispetto alla base
fissa)

$$\begin{pmatrix} I_{0,11} & I_{0,12} & I_{0,13} \\ I_{0,21} & I_{0,22} & I_{0,23} \\ I_{0,31} & I_{0,32} & I_{0,33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix} \dot{\varphi}$$

Da cui

$$L_{0,3} = I_{0,33} \dot{\varphi}$$

dove $I_{0,33}$ è il momento d'Inerzia rispetto all'asse Ox_3 ;
non dipende da t perché le distanze dei punti del
corpo da Ox_3 non cambiano nel tempo

$$\Rightarrow \dot{L}_{0,3} = I_{x_3} \ddot{\varphi}$$

L'equazione del moto è:

$$I_{x_3} \ddot{\varphi} = M_{0,3}^{(e)}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

Proprietà: sotto l'azione di un assegnato sistema di

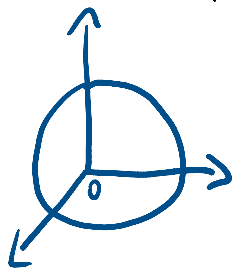
Proprietà: sotto l'azione di un assegnato sistema di forze esterne attrice, un corpo rigido con un asse fisso liscio può compiere ∞^2 moti distinti, ciascuno dei quali risulta determinato assegnando la configurazione e l'atto di moto iniziali



Assumiamo come origine del riferimento fisso e di quello solidale il centro di una cerniera sferica.

Come riferimento solidale scegliamo un riferimento principale d'Inerzia con $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ autovettori di I_0

Se le superfici di contatto tra le sfere della cerniera sono lisce, in ogni punto P di S_2 o contatto con S_1 , T sarà diretta come $(P-O)$, perciò $T \parallel (P-O)$



$$\text{Quindi } M_0^{(v)} = \int_{\sigma'} (P-O) \wedge T \, d\sigma' = 0$$

La seconda equazione cardinale scritta con O come polo, diventa

$$\frac{dL_0}{dt} = M_0^{(a)}$$

\Rightarrow

$$L_0 = M_0^{(a)}(\varphi, \psi, \theta, p, q, r, t)$$

(3 equazioni scalari pure)

$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ base principale d'Inerzia

(φ, ψ, θ) angoli di Eulero

(p, q, r) componenti vettore angolare rispetto alla base
 $i\omega_1 \epsilon_1 + q\omega_2 \epsilon_2 + r\omega_3 \epsilon_3$

(p, q, r) componenti vettoriali angolare rispetto alla Nox
 $w = p\xi_1 + q\xi_2 + r\xi_3$

□

È conveniente proiettare l'equazione

$$\dot{L}_0 = M_0^{(a)}(\psi, \Psi, \theta, p, q, r, t)$$

sugli assi solidali

$$L_0 = Ap\xi_1 + Bq\xi_2 + Cr\xi_3 \quad (A, B, C \text{ sono i momenti principali d'inerzia})$$

$$\dot{L}_0 = \frac{d^r}{dt} L_0 + w \wedge L_0$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_0 &= A\dot{p}\xi_1 + B\dot{q}\xi_2 + C\dot{r}\xi_3 + (p\xi_1 + q\xi_2 + r\xi_3) \wedge (Ap\xi_1 + Bq\xi_2 + Cr\xi_3) \\ &= A\dot{p}\xi_1 + B\dot{q}\xi_2 + C\dot{r}\xi_3 - (\beta - \gamma)qr\xi_1 - (\gamma - \alpha)pr\xi_2 - (\alpha - \beta)pq\xi_3 \end{aligned}$$

Proiettando la seconda equazione cardinale lungo gli assi della terna principale d'inerzia scelta, si ottiene:

$$A\dot{p} - (\beta - \gamma)qr = (M_0^{(a)})_{11}(\psi, \Psi, \theta, p, q, r, t)$$

$$B\dot{q} - (\gamma - \alpha)pr = (M_0^{(a)})_{22}(\psi, \Psi, \theta, p, q, r, t)$$

$$C\dot{r} - (\alpha - \beta)pq = (M_0^{(a)})_{33}(\psi, \Psi, \theta, p, q, r, t)$$

I secondi membri di queste equazioni dipendono dagli angoli di Eulero, dalle componenti di w e dal tempo.

□

Sappiamo che le componenti di w nella base solidale in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali:

loro derivate temporali:

$$\dot{p} = \dot{\psi} \sin(\theta) \sin(\varphi) + \dot{\theta} \cos(\varphi)$$

$$\dot{q} = \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\theta} \sin(\varphi)$$

$$\dot{r} = \dot{\psi} + \dot{\psi} \cos(\theta)$$

possiamo procedere in due modi:

1) Sostituiamo queste tre equazioni nelle relazioni

$$\begin{cases} A\dot{p} - (B-C)q\dot{r} = (M_0^{(1)})_{11}(\varphi, \psi, \theta, p, q, r, t) \\ B\dot{q} - (C-A)r\dot{r} = (M_0^{(1)})_{21}(\quad // \quad) \\ C\dot{r} - (A-B)p\dot{q} = (M_0^{(1)})_{31}(\quad // \quad) \end{cases}$$

Otteniamo un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine nelle incognite φ, ψ, θ (Equazioni di Eulero)

2) Si possono esprimere $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ in funzione di p, q, r e degli angoli di Eulero:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{1}{\sin(\theta)} (p \sin(\varphi) + q \cos(\varphi)) \\ \dot{\theta} = p \cos(\varphi) - q \sin(\varphi) \\ \dot{\psi} = r - \cot(\theta) (p \sin(\varphi) + q \cos(\varphi)) \end{cases} + \begin{cases} A\dot{p} - (B-C)q\dot{r} = (M_0^{(1)})_{11} \\ B\dot{q} - (C-A)r\dot{r} = (M_0^{(1)})_{21} \\ C\dot{r} - (A-B)p\dot{q} = (M_0^{(1)})_{31} \end{cases}$$

(Sistema di 6 equaz. differenziali del I ordine)
nelle 6 incognite $\varphi, \theta, \psi, p, q, r$

Assegnate le condizioni iniziali:

$$\varphi(0) = \varphi^{(0)}, \quad \theta(0) = \theta^{(0)}, \quad \psi(0) = \psi^{(0)}$$

$$p(0) = p^{(0)}, \quad q(0) = q^{(0)}, \quad r(0) = r^{(0)}$$

Ha le seguenti proprietà:

Proprietà: Un corpo rigido con un punto fisso privo di attrito sotto l'azione di forze attive esterne assegnate può compiere ∞^6 moti distinti, ciascuno dei quali risulta determinato assegnando la configurazione e l'asse di moto iniziali del corpo S



Moti per Inerzia

sabato 17 febbraio 2024 11:32

Moti rigidi sferici di un corpo rigido con un punto fisso O , privo di attrito, che avvengono sotto l'azione di un sistema di forze attive il cui momento risultante rispetto al polo O è nullo

$$M_0^{(a)} = 0$$

Equazione di un moto per inerzia:

$$\dot{L}_0 = 0$$

\Rightarrow

$$L_0 = L_0^{(0)}$$

$\Rightarrow L_0$ è costante

Anche l'energia cinetica è costante:

$$\dot{K} = \dot{P}^{(2)} = \underbrace{V_0 \cdot R^{(2)}}_0 + \omega \cdot \underbrace{M_0^{(2)}}_0 = 0$$

Ⓛ

Equazioni di Eulero per le componenti della

velocità angolare rispetto al polo O e rispetto al

rebita angolare rispetto ad una base principale

$$\begin{cases} A\dot{p} - (B-C)g\dot{r} = 0 \\ B\dot{q} - (C-A)p\dot{r} = 0 \\ C\dot{r} - (A-B)p\dot{q} = 0 \end{cases}$$

(3 equazioni differenziali del I ordine in forma normale)

La risoluzione di queste equazioni diventa semplice se almeno due dei tre momenti principali d'inerzia sono uguali:

CASO 1: $A = B \neq C$

Si ha un ellissoide d'Inerzia rotondo rispetto al punto $O \in S$

$$L_0 = A(p\mu_1 + q\mu_2) + C r^{(0)}\mu_3$$

$$\Rightarrow p\mu_1 + q\mu_2 = \frac{1}{A} (L_0 - C r^{(0)}\mu_3)$$

e dunque

$$W = p\mu_1 + q\mu_2 + r^{(0)}\mu_3 = \underbrace{\frac{1}{A} L_0}_{\substack{\text{è costante} \\ \text{rispetto} \\ \text{all'osservatore} \\ \text{fisso}}} + \underbrace{\frac{A-C}{A} r^{(0)}\mu_3}_{\substack{\text{è costante rispetto} \\ \text{all'osservatore} \\ \text{solidale ad } S}}$$

fisso

CASO 2 : $A=B=C$

L'ellissoide d'Inerzia è una sfera

$$L_0 = A(\rho \mu_1 + \rho \mu_2 + \rho \mu_3) = A \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{A} L_0^{(0)}$$

ω è costante

Se l'ellissoide d'Inerzia è una sfera, i moti per inerzia sono rotatori uniformi e l'asse di rotazione è determinato dalla direzione iniziale della velocità angolare



Rotazioni Permanenti

sabato 17 febbraio 2024 15:13

Sono solo i moti rotatori uniformi.

Per determinare le rotazioni permanenti occorre imporre che p, q, r siano costanti.

Equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} (B-C)qr = 0 \\ (C-A)pr = 0 \\ (A-B)pq = 0 \end{cases}$$

CASO 1: $A \neq B \neq C$

$$\begin{cases} qr = 0 \\ pr = 0 \\ pq = 0 \end{cases}$$

$$p = p_0 \quad q = 0 \quad r = 0$$

$$p = 0 \quad q = q_0 \quad r = 0$$

$$p = 0 \quad q = 0 \quad r = r_0$$

CASO 2: $A = B \neq C$

$$p = 0 \quad q = 0 \quad r = r_0$$

$$p = p_0 \quad q = q_0 \quad r = 0$$

CASO 3 : $A = B = C$

$$p = p_0 \quad q = q_0 \quad r = r_0$$

Tra i moti per inerzia di un solido con un punto
fisso O privo di attrito, le rotazioni permanenti
possono avvenire solo intorno agli assi principali
d'inerzia per O



Ellissoide d'Inerzia

sabato 17 febbraio 2024 15:19

Equazione:

$$(P-O) \cdot I_0 (P-O) = 1$$

In un riferimento principale d'Inerzia prendosi

$$(P-O) = x'_1 m_1 + x'_2 m_2 + x'_3 m_3$$

$${}^2 (I_0)_{i'j'} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Con m'_1, m'_2, m'_3 base principale d'Inerzia, l'equazione dell'ellissoide è:

$$1 = (x'_1, x'_2, x'_3) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A x'^2_1 + B x'^2_2 + C x'^2_3$$

Pertanto

$$\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}$$

sono le lunghezze dei semiasse dell'ellissoide



Formulazione Lagrangiana

sabato 17 febbraio 2024 15:26

Equazione del moto per un punto materiale:

$$m_i \ddot{x}_i = R_i^{(z)} + R_i^{(v)}$$

Equazioni cardinali corp rigido:

$$m_i \ddot{x}_i = R_i^{(z)} + R_i^{(v)}$$

$$\dot{L}_{O_i} = M_{O_i}^{(z)} + M_{O_i}^{(v)}$$

Vincoli sulle posizioni dei corpi vengono detti olonomi

Vincoli bilaterali: $f_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t) = 0$ $\alpha = 1, \dots, \bar{\alpha}$
con $\bar{\alpha} < l$

Vincoli unilaterali: $g_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t) \geq 0$ $\beta = 1, \dots, \bar{\beta}$

Se in nessuna delle equazioni e disuguaglianze compare esplicitamente il tempo, i vincoli vengono detti cleronomi; altrimenti reonomi.

Se le funzioni f_α sono di classe C^1 , la matrice Jacobiana è:

... .. $\lambda_1 \dots \lambda_l$

matrice Jacobiana \bar{e} :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_l} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_l} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Caratteristica} \\ \text{massima per } \bar{e} \end{array} \right)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_l$ possono essere espressi in termini di altre $m = l - \bar{e}$ variabili. Le indicheremo con q_1, \dots, q_m :

$$\lambda_1 = \lambda_1(q_1, \dots, q_m)$$

\vdots

$$\lambda_l = \lambda_l(q_1, \dots, q_m)$$

(Coordinate lagrangiane)
(Sono indipendenti ma non arbitrarie)

Ⓢ

Vincolo anolonomo (non proviene da vincoli sulle posizioni)

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = a_i \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = h$$

Velocità :

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial r}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} v = v(q_i, \dot{q}_i, t) \\ dr = \frac{\partial r}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial r}{\partial t} dt \end{cases}$$

Accelerazione:

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial q_h} \ddot{q}_h + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Spostamento Possibile: è uno spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli e della loro eventuale dipendenza dal tempo

$$\delta r = r(q + \delta q, t + \delta t) - r(q, t)$$

$$\approx \frac{\partial r}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial r}{\partial t} \delta t$$

Spostamento Virtuale: è un qualsiasi spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli ma non della loro eventuale dipendenza dal tempo

$$\delta r = r(q + \delta q, t) - r(q, t)$$

$$\approx \frac{\partial r}{\partial q_h} \delta q_h$$



Primo Teorema di D'Alembert-Lagrange

sabato 17 febbraio 2024 15:55

TEO: Per ogni spostamento virtuale, il lavoro virtuale totale delle forze d'Inerzia, delle forze attive e delle reazioni vincolari è nullo

$$\left(\underset{\substack{\parallel \\ -m_i \ddot{x}_i}}{R_i^{(m)}} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{R_i^{(a)}} + R_i^{(v)} \right) \cdot \delta r_i = 0$$



Secondo Teorema di D'Alembert-Lagrange

sabato 17 febbraio 2024 15:58

TEO: Se sul sistema in studio agiscono vincoli
olonomi lisci, il lavoro complessivo delle
reazioni vincolari, per ogni spostamento virtuale,
è non negativo

$$\delta L^{(v)} \geq 0$$

(Se lo spostamento virtuale è reversibile $\Rightarrow \delta L^{(v)} = 0$)

Terzo Teorema (Relazione simbolica (pura) della dinamica)

sabato 17 febbraio 2024 16:03

TEO : Se il Sistema S è a vincoli olonomi lisci,
deve essere soddisfatta la relazione:

$$\delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} \leq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Relazione Simbolica (Pura)} \\ \text{della Dinamica} \end{array} \right)$$

Componenti Lagrangiane

sabato 17 febbraio 2024 16:09

Componenti Lagrangiane:

• Delle forze d'inerzia

$$T_h = - \sum_{i=1}^p m_i a_i \frac{\partial \Gamma_{0i}}{\partial q_h} - \sum_{i=p+1}^n \int_{C'_i} p_i a_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_h} d\Gamma'_i$$

• Delle forze attrice

$$Q_h = \sum_{i=1}^p R_i^{(a)} \frac{\partial \Gamma_{0i}}{\partial q_h} + \sum_{i=p+1}^n \int_{C'_i} p_i f_i^{(a)} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_h} d\Gamma'_i$$

Ⓢ

Equazioni di Lagrange

sabato 17 febbraio 2024 16:13

$$T_h(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + Q_h(q, \dot{q}, t) = 0$$

che si può riscrivere nella forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h$$

(Nel caso di forze conservative: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$)

Una sollecitazione attiva, che sia posizionale si dice conservativa se esiste una funzione $V(q)$, detta potenziale, tale che

$$Q_h = \frac{\partial V}{\partial q_h}$$

Il lavoro effettivo svolto dalla sollecitazione conservativa è:

$$\delta L^{(a)} = Q_h \delta q_h = \frac{\partial V}{\partial q_h} \delta q_h = \delta V \quad (\delta q_h = \dot{q}_h \delta t)$$

Dal teorema delle forze vive si ha:

$$dK = dL^{(a)} + dL^{(M)} = dV$$

Energia Potenziale: $U = -V(q)$

Energia Meccanica: $\mathcal{E} = K(q, \dot{q}) + U(q)$

Funzione di Lagrange: $\mathcal{L} = K(q, \dot{q}) - V(q)$

Le equazioni di Lagrange assumono la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$$

Una funzione si dice un integrale primo del moto se è costante lungo le soluzioni delle equazioni di Lagrange, cioè se:

$$f(q(t), \dot{q}(t), t) = f(q(t_0), \dot{q}(t_0), t_0)$$

Una configurazione C^* , corrispondente al valore q^* della n -pla di coordinate lagrangiane del sistema, si dice di equilibrio per S se, posto il sistema in questa configurazione con atto di moto nullo, esso

in questa configurazione con atto di modo nullo, esso
si rimane indefinitamente

$$\begin{cases} q(t_0) = q^* \\ \dot{q}(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q(t) = q^*$$

Affinché la configurazione C^* sia di equilibrio è
che le componenti lagrangiane delle forze attive
soddisfano le condizioni:

$$Q_h(q^*, 0, t) = 0 \quad h = 1, \dots, m \\ \forall t \geq t_0$$

Inoltre

$(q^*, 0)$ è uno stato di equilibrio \Leftrightarrow è un punto stazionario
dell'energia potenziale



Criterio di stabilità di Dirichlet

sabato 17 febbraio 2024 19:00

Se q^* è un punto di minimo proprio dell'energia potenziale V , allora la configurazione C^* è una configurazione di equilibrio stabile per il sistema S

Primo teorema di Lyaperson

sabato 17 febbraio 2024 19:02

Se l'energia potenziale $U(q_1, \dots, q_m)$ di un sistema conservativo, in una posizione di equilibrio, non ha un minimo e questa circostanza è riconoscibile dall'analisi del valore locale delle derivate seconde di U , allora la data posizione di equilibrio è instabile

